

Défi entre sœurs

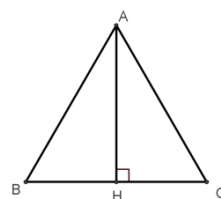
Éléments de solution

Partie A

1. La hauteur [AH] du triangle équilatéral ABC est un des côtés de l'angle droit du triangle AHB. D'après le théorème de Pythagore $AH^2 = AC^2 - CH^2$. $AC = 1$ et $CH = \frac{1}{2}$.

Donc $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Calcul des longueurs des diagonales



<i>Deux triangles</i>	<i>Trois triangles</i>	<i>Quatre triangles</i>	<i>Six triangles</i>
La plus petite des diagonales a pour longueur 1, la plus grande deux fois la longueur de la hauteur du triangle, soit $\sqrt{3}$	Trapèze isocèle : les deux diagonales ont la même longueur, celle de la plus grande diagonale du cas précédent	Le triangle ACH rectangle en H fournit, grâce au théorème de Pythagore, la longueur de la diagonale [AC] : $AC^2 = AH^2 + CH^2$ $AC^2 = 6,25 + 0,75$. D'où $AC = \sqrt{7}$. La plus petite diagonale est la diagonale du cas précédent.	La plus petite diagonale est la plus grande du cas précédent. Pour la plus grande, on calcule la longueur de l'hypoténuse du triangle ACJ, rectangle en J, projeté orthogonal de C sur (AB). $AB^2 = 10,5 + 0,75$, d'où $AB = \sqrt{11}$

Partie B

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair**, on pose $n = 2p$, la plus grande des diagonales est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit a pour longueur $p + \frac{1}{2}$ et l'autre $\frac{\sqrt{3}}{2}$. $L^2 = p^2 + p + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ donne le résultat demandé.

2. Lorsqu'on ajoute un triangle, la figure obtenue est un trapèze isocèle dont les diagonales ont toutes les deux la longueur L .

3. Dans le cas d'un parallélogramme constitué de 56 triangles, selon la question 1. de cette partie, $L = \sqrt{813}$ et $l = \sqrt{757}$.

Partie C

1. Le nombre $p^2 + p$ (égal à $p(p + 1)$) est en effet un nombre pair. Son successeur est impair. En revanche, $7^2 + 7 + 1 = 57$, multiple de 3...

2. $\sqrt{2}$, racine d'un nombre premier pair, ne peut figurer dans la suite des longueurs possibles. Cette suite est par construction croissante et $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$ en sont deux termes consécutifs.

3. La question est : existe-t-il un entier naturel p solution de l'équation $p^2 + p + 1 = 2015$? Cette équation s'écrit $\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 = 2014,25$ et 2014,25 n'est le carré d'aucun décimal. La réponse est donc non.

4. 1 015 056, 25 est le carré de 1 007,5. L'équation $\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 = 1015056,25$ a donc deux solutions, 1 007 et -1008 (mais $p > 0$). Il y a trois quadrilatères qui conviennent, en alignant 2014 triangles (grande diagonale), 2015 triangles (les deux diagonales) et 2016 triangles (petite diagonale).

5. Quelques essais semblent confirmer cette tendance : 0,9 est dépassé dès la première différence, 0,99 à la sixième.

p	$L(p + 1)$	$L(p)$	Différence
1	2,645751311	1,732050808	0,913700503
2	3,605551275	2,645751311	0,959799964
3	4,582575695	3,605551275	0,977024419
4	5,567764363	4,582575695	0,985188668
5	6,557438524	5,567764363	0,989674161
6	7,549834435	6,557438524	0,992395911

Seule une démonstration pourra le confirmer. Calculons donc : $L(p+1) - L(p) = \sqrt{p^2 + 3p + 3} - \sqrt{p^2 + p + 1}$

Ou encore :
$$L(p+1) - L(p) = \frac{(\sqrt{p^2+3p+3})^2 - (\sqrt{p^2+p+1})^2}{\sqrt{p^2+3p+3} + \sqrt{p^2+p+1}}$$

Et enfin :
$$L(p+1) - L(p) = \frac{2 + \frac{2}{p}}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}}\right)}$$

Où l'on voit que, pour les « grandes » valeurs de p (elles n'ont pas besoin d'être si grandes que cela, d'ailleurs), le numérateur comme le dénominateur de ce quotient ne cessent de se rapprocher de 2 ; le quotient est donc proche de 1.

On est les rois !

Éléments de solution

Partie A

- Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, alors $0 \leq 2x \leq 1$. Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $0 \leq 1 - x \leq \frac{1}{2}$ et on est ramené au cas précédent.
- L'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est « étiré » sur l'intervalle $[0, 1]$, l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est « replié » sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis lui aussi « étiré ».

Partie B

- Les neuf images successives de ces deux nombres sont données dans le tableau :

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
0,33	0,66	0,68	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96

Les images successives de $\frac{1}{3}$ se stabilisent rapidement, celles de 0,33 ne se stabilisent pas (le 0,16 prédit cependant le retour de 0,64 et donc un cycle). À droite, les premières images engendrées par 0,666666 confirment cette dispersion, plus lente.

- La fève ne change pas de position : l'équation $f(x) = x$ a pour solutions 0 (dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$) et $\frac{2}{3}$ (dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$).

- La fève revient à sa position initiale après deux opérations : on est amené à discuter en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en quatre. L'équation $f(f(x)) = x$ a pour solutions $\frac{2}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $\frac{4}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. On élimine 0 et $\frac{2}{3}$, qui sont naturellement réapparues.

- La fève revient à sa position initiale après trois opérations. Le tableau ci-dessous permet de suivre la discussion (on n'a pas dressé le tableau correspondant à la situation précédente...)

Intervalle	$\left[0, \frac{1}{8}\right]$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$	$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$	$\left[\frac{7}{8}, 1\right]$
Écriture de $f(x)$	$2x$	$2x$	$2x$	$2x$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$
Intervalle contenant $f(x)$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$
Écriture de $f(f(x))$	$4x$	$4x$	$2-4x$	$2-4x$	$4x-2$	$4x-2$	$4-4x$	$4-4x$
Intervalle contenant $f(f(x))$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$
Écriture de $f(f(f(x)))$	$8x$	$2-8x$	$8x-2$	$4-8x$	$8x-4$	$6-8x$	$8x-6$	$8-8x$
Égalité à traiter	$7x=0$	$9x=2$	$7x=2$	$9x=4$	$7x=4$	$9x=6$	$7x=6$	$9x=8$
Solutions	exclu	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{7}$	exclu	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{9}$

On remarque que les six nombres solutions sont éléments de deux cycles : $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}$ d'une part, $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$ d'autre part.

- Atteindre sa cible, pour un nombre non nul, c'est d'abord atteindre 1, puisque 1 est l'autre nombre de l'intervalle $[0, 1]$ dont l'image par f est 0. Tous les inverses des puissances entières de 2

0,66666666
0,66666668
0,66666664
0,66666672
0,66666656
0,66666688
0,66666624
0,66666752
0,66666496
0,66667008
0,66665984
0,66668032
0,66663936
0,66672128
0,66655744
0,66688512
0,66622976
0,66754048
0,66491904
0,67016192
0,65967616
0,68064768
0,63870464
0,72259072
0,55481856
0,89036288
0,21927424
0,43854848
0,87709695

...

atteignent leur cible (par doublement successif, puisqu'à chaque étape on obtient un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$).
Le nombre $\frac{2}{3}$, égal à toutes ses images successives, n'atteint pas sa cible.

4. Les images successives de $\frac{2^{015}}{2^{2015}}$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$ (elles sont obtenues par doublement successif) jusqu'à $\frac{2^{048}}{2^{048}}$, qui est supérieur. L'image de ce nombre est $\frac{33}{1\ 024}$, dont les images sont encore inférieures à $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\frac{33}{64}$, auquel succèdent $\frac{31}{32}, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}$, etc. jusqu'à $\frac{1}{2}$ et 1 puis 0.

5. En raisonnant sur les antécédents : 0 a comme antécédents lui-même et 1, 1 n'a comme antécédent que $\frac{1}{2}$, celui-ci ayant comme antécédents $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. On se donne un entier n et un entier p non nul inférieur à 2^n , et on cherche les antécédents de $\frac{p}{2^n}$. Ce sont les solutions des équations $\frac{p}{2^n} = 2x$ ou $\frac{p}{2^n} = 2(1 - x)$. Il y en a deux, $\frac{p}{2^{n+1}}$, qui est inférieur à $\frac{1}{2}$, et $\frac{2^{n+1}-p}{2^{n+1}}$, qui lui est supérieur. Les prédécesseurs de 0 sont donc bien les quotients par une puissance de 2 des entiers inférieurs à cette puissance... et 0.

Partie C

1. On introduit une variable entière N , de valeur initiale 0. Avant la fin du **Tant que**, l'instruction $N \leftarrow N+1$ (Ou toute autre forme d'incrément) permet de compter le nombre d'itérations. Après la fin du **Tant que**, on donne une instruction d'affichage de N . Si le nombre introduit dans l'algorithme n'atteint pas la cible, l'algorithme ne s'arrête pas.

2. Le nombre $1/9$ est à l'origine du cycle $2/9, 4/9, 8/9$. L'algorithme tourne indéfiniment. Les images successives du nombre $1/9$ subissent, de l'une à la suivante, des dégradations dues aux approximations inhérentes au calcul sur machine. Dans le tableau de droite, on voit que les images successives de $1/9$, qui devraient être écrites 0,22222222 ; 0,44444444 et 0,88888888, perdent de la précision jusqu'à être « confondues » avec des rationnels de $[0,1]$ dont le dénominateur est une puissance de 2, ensemble dense dans $[0,1]$. (*)

Par ailleurs, on prend toujours un risque en posant une condition du type $x > 0$ dans un programme d'ordinateur qui calcule sur des nombres en virgule flottante, mais ceci est une autre histoire.

(*) On pourra consulter les entretiens donnés par Sylvie Boldo sur https://interstices.info/jcms/c_36153/pourquoi-mon-ordinateur-calcule-t-il-faux ?

0,444444656
0,888889313
0,222221375
0,444442749
0,888885498
0,222229004
0,444458008
0,888916016
0,222167969
0,444335938
0,888671875
0,22265625
0,4453125
0,890625
0,21875
0,4375
0,875